אל הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות בדרך הקלה

פיוטר ג'וסביץ

רוב הסטודנטים הלומדים קורס בחשבון דיפרנציאלי יזכרו (חלקם) באימה (כלשהי?) את הגבולות הטריגונומטריים "המיוחדים":

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad (1) \qquad \text{ו-} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$

גבולות אלה מופיעים כמרכיבים הכרחיים בהוכחות המקובלות ביותר של חוקי הגזירה של הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות.

$$(\sin x)'=\cos x \quad (2) \qquad \text{ו-} \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

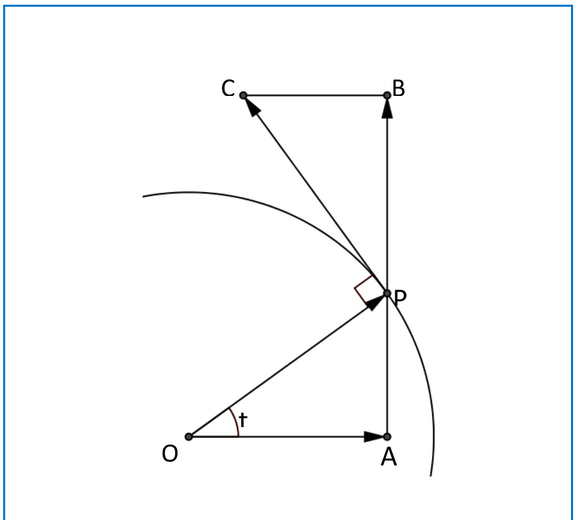
ההוכחה המקובלת לנגזרת הימנית ב- (2) עושה שימוש בהגדרת הנגזרת (Stewart, 2016), תוך שימוש בנוסחת הסינוס של סכום זוויות לפיתוח הביטוי $\sin(x+h)$, פירוק לגורמים של הביטוי המתקבל, ושימוש בשני הגבולות המופיעים ב- (1). סטודנטים בדרך כלל נדרשים להראות הבנה של גבולות מיוחדים אלה על-ידי חישוב גבולות קשורים כגון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3\sin(2\sin x))}{x}$$

עם זאת, החשיבות של גבולות אלה הולכת לאיבוד בקלות - תפקידם הוא תפקיד מסייע בלבד, ובאמת (1) הוא לא יותר מאשר מקרה פרטי של (2) כאשר $x=0$. הוכחות ישירות של (1) משתרעות על פני עמוד או יותר, ובדרך כלל מוצאות את מקומן בנספח. יתרה מזו: התובנה אותה אנחנו לומדים מ- (1), שכדי שהאמור ב- (1) ו- (2) יהיה נכון, x חייב להימדד ברדיאנים, נקברת בקלות מתחת לפרטים.

המטרה של שורות אלה היא להציג הוכחה פשוטה, במיוחד של (2), שאין בה שימוש בגבולות (1). ערך מוסף של הוכחה זו הוא שהיא מבהירה היטב מדוע x חייב להימדד ברדיאנים.

כצעד ראשון ניזכר בהגדרות של שתי הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות: $\cos t$ ו- $\sin t$. הן בהתאמה שיעורי ה- x וה- y של הנקודה **P** על מעגל היחידה, כאשר t הזווית ברדיאנים בין הכיוון החיובי של ציר ה- x לבין הקרן OP. מכאן שכאשר t גדלה, הנקודה $P(t)=(\cos t,\sin t)$ נעה לאורך מעגל היחידה נגד כיוון השעון. נזכור שעל-פי הגדרת הרדיאן, אורך הקשת על מעגל היחידה שווה לזווית המתאימה (מיוצגת ברדיאנים). לכן כאשר t נמדדת ברדיאנים, מהירות הנקודה **P** היא יחידת אורך אחת ליחידת זמן.



איור 1 : הנקודה $P(t)=(\cos t,\sin t)$.
"משולש המיקום" ΔOPA ו"משולש המהירות" ΔPCB חופפים כאשר t נמדדת ברדיאנים.

כעת נתמקד ב- t מסוים, $t \in \mathbb{R}$. לשם פשטות נניח $t \in [0, \pi/2]$. נסמן $O = (0, 0)$, $P(t) = (x(t), y(t))$ ו- $A = (\cos t, 0)$. נגדיר נקודות B ו- C כך ש- $\vec{PC}$ וקטור המהירות של הנקודה P, $\vec{AP}$ מקביל ל- $\vec{PB}$, ו- $\angle PBC = \frac{\pi}{2}$ (ראו איור 1).

כיוון ש- $\vec{PC}$ משיק למעגל בנקודה P, $\angle OPC = \frac{\pi}{2}$. כיוון ש- $\vec{AP}$ ו- $\vec{PB}$ מקבילים, $\angle AOP = \angle BPC$ ו- $\angle OPA = \angle PCB$. מכאן שהמשולשים OPA ו- PCB דומים.

כאמור, אם t נמדדת ברדיאנים אז $|\vec{PC}| = 1$. כיוון שגם $|\vec{OP}| = 1$ הרי שהמשולשים OPA ו- PCB למעשה חופפים.

כיוון ש- $\vec{PC}$ הוא וקטור המהירות הרגעית של P, ו- P נקודה ברביע הראשון, הרכיבים של $\vec{PC}$ המקבילים לציר ה- x ולציר ה- y, $\vec{BC}$ ו- $\vec{PB}$, מקיימים: $(\cos t)' = -|\vec{BC}|$, וְ- $(\sin t)' = |\vec{PB}|$.

נשלב זאת עם חפיפת משולש המהירות ומשולש המיקום ונקבל:

$(\cos t)' = -|\vec{AP}| = -\sin t$, וְ- $(\sin t)' = |\vec{OA}| = \cos t$

מה שמוכיח את (2).

לסיכום:

הבאנו הוכחות גאומטריות לנוסחאות של נגזרות הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות, תוך הימנעות מהנוסחאות של הגבולות הטריגונומטריים, הדרושות בדרך כלל בהוכחות המקובלות, המתבססות על הגדרת הגבול, ואשר הוכחתן אינה טריוויאלית.

המאמר מתורגם, עם התאמות קלות, באישור המחבר.

המאמר המקורי:

Josevich, P. (2016). Trigonometric Derivatives Made Easy. *The College Mathematics Journal 47* (5), 365-366.

Piotr Josevich

Essex High School, Essex Junction, Vermont, USA

piotrjosevich@gmail.com